PROBABILITE

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences. Département d'Informatique

Licence d'Informatique
Année 1998-99

Epreuve de Probabilités-Statistiques

21 Janvier 1999 Durée : 3 heures

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées

Exercice 1 *(2 points)*

Le coût (en MF) de réalisation d'un grand projet est une variable aléatoire X ayant comme densité de probabilité la fonction f(x) définie par

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 300 \quad \text{ou} \quad x > 900 \qquad \text{et} \qquad f(x) = k / x^2 \quad \text{sinon.}$$

1. Déterminer la valeur de k.

2. Quelle est la probabilité pour que le coût du projet soit inférieur ou égal à 600 MF ?

3. Quelle est la probabilité pour que ce projet coûte plus de 600 MF sachant qu'il a déjà coûté plus de 400 MF ?

Exercice 2 *(6 points)*

Pour commander au constructeur un certain type de véhicules, un concessionnaire de voitures utilise la stratégie qui consiste à lancer, en fin de semaine, une commande de trois véhicules dès qu'il reste un seul véhicule en stock.

Si la quantité commandée est disponible chez le constructeur, la livraison est effectuée au début de la semaine qui suit celle de la commande. Dans le cas contraire, la livraison est reportée pour le début de la semaine suivante et ainsi de suite (même lorsqu'il ne reste plus rien en stock chez le concessionnaire). La probabilité pour que la quantité commandée soit disponible est égale à 0.6, et est égale à 0.4 pour qu'elle ne le soit pas)

Une étude de marché a montré qu'au maximum deux véhicules peuvent être vendus par semaine par le concessionnaire et que les probabilités d'en vendre un ou deux exemplaires par semaine sont égales respectivement à 0.5 et 0.3. Soit X_n le stock à la fin de la semaine n.

1. Montrer que la suite X_n est une chaîne de Markov et préciser l'ensemble E de ses états.

2. Donner la matrice P des probabilités de transition.

3. La limite de P^m existe-t-elle quand l'entier positif m tend vers l'infini ? Si oui indiquer à quoi est-elle égale et donner le vecteur des probabilités stationnaires.

4. On suppose qu'à l'instant initial, le concessionnaire dispose d'un stock de un ou deux véhicules avec les probabilités $p(X_0 = 1) = 0.4$ et $p(X_0 = 2) = 0.6$. Quelles sont les probabilités respectives pour qu'à la fin de la deuxième semaine le stock soit égal à respectivement 0, 1 et 3 ?

5. Si le stockage d'un véhicule coûte par semaine 500 F au concessionnaire et si un coût de 5000 F est ressenti pour chaque véhicule demandé non disponible, quel est par semaine le coût moyen de fonctionnement de ce système ?

Exercice 3 *(7 points)*

Pour ses besoins propres, une entreprise loue une photocopieuse à 500 F par jour (la maintenance de la machine est comprise dans le coût de la location ; un jour = 10 heures). Le personnel utilisateur de la photocopieuse arrive suivant un processus de Poisson : en moyenne 5 personnes par heure. Chaque utilisateur occupe la machine en moyenne pendant 8 minutes ; le temps d'utilisation de la machine par une personne suit une loi exponentielle. Par ailleurs, le temps que passe le personnel dans le service de photocopies engendre un coût à l'entreprise estimé à 45 F par heure et par personne.

1. Donner la probabilité pour qu'un utilisateur qui arrive trouve la photocopieuse libre.

2. Quelle est la probabilité pour qu'un utilisateur qui arrive trouve une personne en train d'attendre que la photocopieuse se libère ?

3. Déterminer le temps moyen passé par chaque utilisateur dans le service de photocopies, ainsi que le temps moyen passé dans l'attente que la photocopieuse se libère.

4. Donner le coût horaire moyen ressenti par l'entreprise

5. Reprendre les questions 1, 2 et 3, en supposant que le service de photocopies dispose de deux machines de même type. Que peut-on en déduire à propos du nombre optimal de machines à mettre en place ?

6. L'entreprise reçoit l'offre de location suivante : Elle peut disposer de 3 photocopieuses (de même type que précédemment) avec un coût journalier de location égal à 300 F ; la maintenance des machines étant à sa charge. (Dans ce cas, le coût engendré par les pertes de temps dans le service de photocopies devient négligeable). Pour la maintenance des machines l'entreprise dispose d'un seul technicien ; et d'après des données disponibles, chaque machine tombe en panne suivant un processus de Poisson une fois tous les 3 jours. Une réparation nécessite en moyenne 3 heures ; le temps de réparation étant une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. Sachant que chaque réparation coûte 60 F et que une heure de non fonctionnement d'une machine entraîne un coût de 75 F, l'entreprise a-t-elle intérêt à accepter cette offre ?

Exercice 4 *(5 points)*

Un poissonnier achète chaque matin A kilos de poissons. Le prix qu'il paye au pêcheur est une fonction de la forme $P = (10X + 45)A$ où X est une variable aléatoire dont la densité de probabilité f(x) est donnée par :

$$f(x) = 1 - x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad f(x) = x - 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin [0,2]$$

Le poisson est vendu au prix de 70 F le kilo. En fin de journée, la quantité qui reste est vendue à 25 F le kilo. Le poissonnier considère que les demandes de poissons peuvent être réparties en trois catégories : importante, moyenne et faible, avec des probabilités respectives 0.3, 0.45 et 0.25. Les demandes pour chaque catégorie sont entre 36 et 72 kilos et peuvent être considérées comme des lots de 12 kilos. Leurs distributions sont comme suit :

Demande	Importante	Moyenne	Faible
36	0.10	0.25	0.45
48	0.20	0.30	0.30
60	0.40	0.30	0.15
72	0.30	0.15	0.10

1. Déterminer un processus de génération de nombres aléatoires pour la loi de probabilité dont la densité est la fonction f(x).

2. a) Le poissonnier ressent un coût de 10 F pour chaque kilo de poissons demandé et non satisfait. Développer un modèle de simulation pour calculer le gain moyen par jour.

   b) Simuler ce modèle sur 3 jours pour A = 48 (en utilisant les nombres aléatoires de la première colonne de la table distribuée).

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences. Département d'Informatique

Licence d'Informatique
Septembre 1999

Epreuve de Probabilités-Statistiques

15 septembre 1999   Durée : 2 h 30 mn

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées

Exercice 1 *(7 points)*

Etant donné le coût élevé que peut entraîner une machine en panne (perte de production, perte de clientèle, ...), une entreprise qui gère le fonctionnement de 10 machines a mis en place un service de maintenance de sorte que toute machine qui sort du service de maintenance fonctionne ensuite comme une machine neuve. L'entreprise a observé le fonctionnement des 10 machines pendant un certain nombre de jours et a remarqué les faits suivants : Aucune machine ne fonctionne plus de 5 jours sans tomber en panne. Toute machine qui tombe en panne le fait toujours en fin de journée. Une machine en panne passe immédiatement par le service de maintenance et se remet en service le lendemain. Pendant la période d'observation, les 100 pannes qui ont été relevées se sont réparties de la manière suivante :

20 pannes sur des machines qui ont fonctionné 1 seul jour après leur sortie du service de maintenance,
30 ------------------------------ 2 jours ------------------------------,
30 ------------------------------ 3 jours ------------------------------,
15 ------------------------------ 4 jours ------------------------------,
5 ------------------------------ 5 jours ------------------------------.

On définit l'état d'une machine comme étant le nombre de jours écoulés depuis son dernier passage au service de maintenance. On désigne par X_n la variable aléatoire qui décrit l'état d'une machine le matin du n-ième jour : $X_n = j$ signifie que j jours se sont écoulés entre le matin du jour n et la sortie de la machine du service de maintenance. En particulier : $X_n = 0$ signifie que la machine est tombée en panne le soir du (n-1)-ième jour et $X_n = 1$ que la machine est tombée en panne le soir du (n-2)-ième jour et a fonctionné le jour (n-1) sans tomber en panne le soir.

1. Remarquer que pour $n \geq 2$, on a soit $X_n = 0$, soit $X_n = X_{n-1} + 1$. En déduire que la suite (X_n) est une chaîne de Markov. Préciser l'ensemble E de ses états.

2. Montrer que la matrice P des probabilités de transition s'écrit :

$$P = \begin{matrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 5/8 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

3. La limite de P^m existe-t-elle quand l'entier positif m tend vers l'infini ? Si oui indiquer à quoi est-elle égale et donner le vecteur des probabilités stationnaires.

4. Si une machine vient de passer dans le service de maintenance, quelle est la probabilité pour qu'elle tombe en panne après deux jours de fonctionnement sans panne ?

5. L'entreprise envisage les deux stratégies de maintenance suivantes

(i) Maintenance immédiate pour toute machine qui tombe en panne.

(ii) Maintenance immédiate pour toute machine qui tombe en panne et de plus chaque machine doit passer dans le service de maintenance après deux jours de fonctionnement sans panne.

Si la panne d'une machine entraîne un coût de 25 000 F et son passage dans le service de maintenance un coût de 5 000 F, quelle stratégie est-elle préférable à l'entreprise ?

Exercice 2 *(7 points)*

Devant un distributeur automatique, des clients arrivent suivant un processus de Poisson au rythme de 1 client toutes les 4 minutes. Le distributeur met en moyenne 2 minutes pour servir un client; le temps de service est exponentiel.

1. On suppose que tout client qui arrive attende son tour pour ne repartir qu'une fois servi.

1.1. Quelle est la probabilité pour qu'un client qui arrive ne trouve personne dans la file d'attente ?

1.2. Quel est le nombre moyen de clients qui se trouvent dans la file d'attente ?

1.3. Quelle est la durée moyenne de séjour d'un client devant le guichet, dans l'attente de son tour ou en train d'être servi ?

2. On suppose maintenant que le distributeur se trouve dans une salle qui peut accueillir au maximum 4 personnes. Lorsqu'il y a 4 personnes présentes dans la salle, tout nouveau client qui arrive n'y est pas admis et doit repartir

2.1. Quelle est la probabilité pour qu'un client qui arrive puisse entrer dans la salle ?

2.2. Quel est le nombre moyen de clients qui se trouvent à l'intérieur de la salle ?

2.3. Quel est le nombre moyen de clients servis par heure ?

2.4. Quelle est la durée moyenne de séjour d'un client dans la salle ?

3. On suppose à nouveau que tout client qui arrive puisse attendre son tour et ne repartir qu'une fois servi. On suppose aussi que les clients arrivent, suivant un processus de Poisson, au rythme de 2 clients par minute. L'organisme propriétaire et gestionnaire du distributeur envisage la mise en service de nouveaux distributeurs du même type. Il estime que chaque minute d'attente subie par un client entraîne une perte de 1 F. La mise en place d'un nouveau distributeur entraînerait un coût horaire moyen de fonctionnement de 150 F.

3.1. Quel est le nombre minimum de distributeurs que l'organisme doit installer pour que le système admette un état stationnaire ?

3.2. Déterminer le nombre de distributeurs à mettre en service de manière à minimiser le coût.

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences
Département d'Informatique

Licence d'Informatique
Informatique théorique
1er semestre 2001 - 2002

Epreuve de Probabilités-Statistiques
23 Janvier 2002   Durée : 1 h 45 mn

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées   *Le sujet comporte 2 pages.*

Exercice 1 *(4 points)*

On lance deux dés à 6 faces bien équilibrés. Déterminer chacune des probabilités :

1. que la somme des nombres obtenus sur les deux dés soit supérieure ou égale à 9 sachant que l'on a au moins un 6 sur un dé.

2. que l'on ait 4 sur un dé sachant que l'on a au moins un 2.

3. que la somme des deux nombres obtenus sur les deux dés soit 5 sachant que la différence entre la plus grande et la plus petite de ces deux valeurs vaut 4.

Exercice 2 *(4 points)*

1. Montrer que la fonction f définie par :

$f(x) = 0$ pour $x \leq -1$ et $x \geq 1$

$f(x) = 1 + x$ pour $-1 \leq x \leq 0$

$f(x) = 1 - x$ pour $0 \leq x \leq 1$

est une densité de probabilité (d'une certaine variable aléatoire X).

2. Déterminer la fonction de répartition, l'espérance mathématique et la variance de X.

3. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $Y = e^{itX}$.

Exercice 3 *(12 points)*

Dans un parc naturel où nichent des rapaces diurnes dont 20 adultes, une équipe d'observation est chargée de surveiller les allées et venues de ces oiseaux adultes. Cette équipe a remarqué que lorsqu'un oiseau quitte le site, il part seul, toujours à l'aube, et n'y retourne que le soir après une absence de i jours consécutifs, i pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4 ou 5. Ainsi, chacun de ces rapaces rentre au parc après au maximum 5 jours d'absences pour repartir dès le lendemain matin. Durant la période d'observation, 1000 sorties et rentrées de ces rapaces ont été relevées, réparties comme suit :

Nombre de jours d'absence :	1	2	3	4	5
Nombres de sorties et de rentrées :	200	300	300	150	50